Caractéristique d'Euler moyenne de sous-variétés nodales aléatoires

Thomas Letendre (ENS de Lyon)

Paris Descartes – 31 mars 2017

Géométrie aléatoire

(M, g) variété riemannienne, compacte, sans bord, de dimension n.
On choisit une sous-variété de codimension r de M “au hasard”.

Question

Que peut-on dire de sa géométrie (volume, courbure, ...) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, caractéristique d'Euler, ...) ?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi, ...
ou un comportement presque sûr.

Polynômes de Kac

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Polynômes de Kac

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Théorème (Kac, 1943)

Soit $P_d = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ où les a_i sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) gaussiennes centrées réduites. On a :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{card}\left(P_d{}^{-1}(0)\right)\right] \sim \frac{2}{\pi} \ln d,$$

quand $d \to +\infty$.

Préliminaire : vecteurs gaussiens

$(V, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ euclidien de dimension N,
Λ opérateur auto-adjoint et défini positif.

Définition

Un vecteur aléatoire $X \in V$ est dite gaussien, centré, de variance Λ, si sa loi admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \Lambda^{-1}x\,, x\right\rangle\right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(0,\Lambda)$.

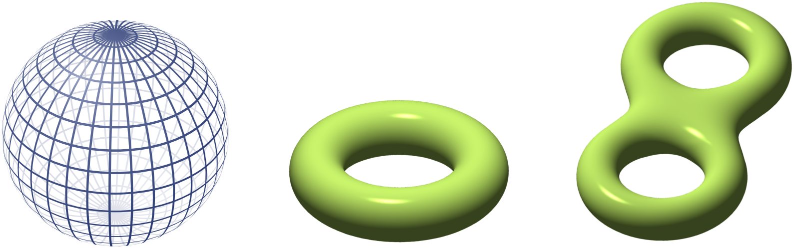
Si $\Lambda = \mathrm{Id}$, on dit que X est réduit ou que c'est un vecteur gaussien standard.

Sous-variétés aléatoires

Variétés

Définition

Une variété lisse de dimension n est un espace topologique séparé M qui est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.



Source : `en.wikipedia.org`

On sait étendre le calcul différentiel aux applications entre variétés.

Sous-variétés

Soient M une variété lisse de dimension n et $r \in \{1, \ldots, n\}$.

Définition

On dit que $Z \subset M$ est une sous-variété lisse de codimension r de M s'il existe une application lisse $f : M \to \mathbb{R}^r$ telle que :

- $Z = f^{-1}(0)$,
- f s'annule transversalement, i.e. pour tout $x \in M$, si $f(x) = 0$ alors $d_x f$ est surjective.

Une sous-variété lisse de codimension r dans M est une variété lisse de dimension $n - r$.

Métrique riemannienne

Définition

Une métrique riemannienne g sur une variété lisse M est la donnée d'un produit scalaire g_x sur chaque espace tangent T_xM, dépendant de façon lisse du point $x \in M$.

Sur une variété riemannienne (M, g) on peut donner un sens à :

- la norme d'un vecteur tangent $v \in T_xM$,
- la longueur d'une courbe $\mathcal{C}^1$,
- la distance entre deux points.

La métrique g induit une mesure de volume sur M, notée $|\mathrm{d}V_M|$.

Sous-variétés nodales aléatoires

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension n.

La mesure riemannienne $|\mathrm{d}V_M|$ induit un produit scalaire L^2 sur $\mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\langle f \,, g\rangle = \int_{x \in M} f(x)g(x) \left|\mathrm{d}V_M\right|.$$

Soit $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ l'opérateur de Laplace–Beltrami.

Faits classiques

- On peut arranger les valeurs propres de Δ en une suite strictement croissante : $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots$, et $\lambda_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$.
- Les espaces propres sont de dimensions finies.

Pour $\lambda \geqslant 0$, on note $V_\lambda = \bigoplus_{\lambda_k \leqslant \lambda} \ker\left(\Delta - \lambda_k \operatorname{Id}\right)$ et on le munit de $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$.

Sous-variétés nodales aléatoires

On fixe $r \in \{1, \ldots, n\}$.

Définition

Soient $f_1, \ldots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, on note $Z_\lambda = \bigcap f_i^{-1}(0)$. Z_λ est appelée sous-variété nodale aléatoire de codimension r.

Lemme

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, Z_λ est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de M (éventuellement vide).

Sous-variétés nodales aléatoires

On fixe $r \in \{1, \dots, n\}$.

Définition

Soient $f_1, \dots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, on note $Z_\lambda = \bigcap f_i^{-1}(0)$.
Z_λ est appelée sous-variété nodale aléatoire de codimension r.

Lemme

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, Z_λ est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de M (éventuellement vide).

Z_λ définit une mesure de Radon aléatoire :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^0(M), \qquad \langle Z_\lambda \, , \varphi \rangle = \int_{Z_\lambda} \varphi \, |\mathrm{d}V_\lambda| \, ,$$

où $|\mathrm{d}V_\lambda|$ est la mesure riemannienne sur Z_λ.

Le cas du cercle $\mathbb{S}^1$ euclidien

On a $\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, et les fonctions propres satisfont : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda\varphi = 0$.

- Les valeurs propres sont les k^2 avec $k \in \mathbb{N}$.
- L'espace propre associé à k^2 est engendré par $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$.
- V_λ est l'espace des polynômes trigonométriques de degré $\leqslant \sqrt{\lambda}$.

Le cas du cercle $\mathbb{S}^1$ euclidien

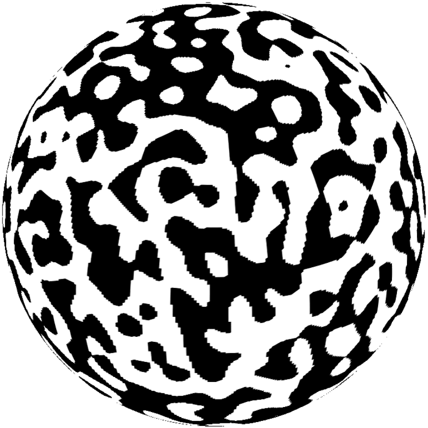
On a $\Delta = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, et les fonctions propres satisfont : $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda\varphi = 0$.

- Les valeurs propres sont les k^2 avec $k \in \mathbb{N}$.
- L'espace propre associé à k^2 est engendré par $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$.
- V_λ est l'espace des polynômes trigonométriques de degré $\leqslant \sqrt{\lambda}$.
- Z_λ est l'ensemble des racines de :

$$f : x \longmapsto \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

où les a_k et b_k sont des v.a.i.i.d. réelles de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Courbes nodales aléatoires



Domaines nodaux aléatoires sur la sphère euclidienne, $\lambda = 1640$.

Image par Alex Barnett (Dartmouth College)

Volume moyen et caractéristique d'Euler moyenne

Volume moyen des hypersurfaces nodales

Soit (M, g) riemannienne compacte sans bord de dimension n.

Théorème (Bérard, 1985)

Soit $f \in V_\lambda$ de loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$ et Z_λ son lieu d'annulation, alors

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}\,(Z_\lambda)] \sim \sqrt{\frac{\lambda}{n+2}}\,\mathrm{Vol}\,(M)\,\frac{\mathrm{Vol}\,(\mathbb{S}^{n-1})}{\mathrm{Vol}\,(\mathbb{S}^n)},$$

lorsque $\lambda \to +\infty$.

Sur $\mathbb{S}^1$ euclidien, $\mathbb{E}[\mathrm{card}(Z_\lambda)] \sim \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda}$.

Volume moyen des sous-variétés nodales

Théorème (Zelditch, 2009 ; L., 2014)

Soient $f_1, \dots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, et $Z_\lambda = \bigcap f_i^{-1}(0)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0(M)$ on a :

$$\mathbb{E}[\langle Z_\lambda \, , \varphi \rangle] = \left(\frac{\lambda}{n+2} \right)^{\frac{r}{2}} \left(\int_M \varphi \, |\mathrm{d}V_M| \right) \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n}\right)} + \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0} \, O\Big(\lambda^{\frac{r-1}{2}} \Big) \, ,$$

où le terme d'erreur est indépendant de ϕ.

Volume moyen des sous-variétés nodales

Théorème (Zelditch, 2009 ; L., 2014)

Soient $f_1, \ldots, f_r \in V_\lambda$ *des v.a.i.i.d de loi* $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, *et* $Z_\lambda = \bigcap f_i^{-1}(0)$. *Pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}^0(M)$ *on a :*

$$\mathbb{E}[\langle Z_\lambda , \varphi \rangle] = \left(\frac{\lambda}{n+2} \right)^{\frac{r}{2}} \left(\int_M \varphi \, |\mathrm{d}V_M| \right) \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n}\right)} + \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0} \, O\!\left(\lambda^{\frac{r-1}{2}}\right),$$

où le terme d'erreur est indépendant de ϕ.

Corollaire (Équidistribution en moyenne)

En tant que formes linéaires continues sur $\left(\mathcal{C}^0(M), \|\cdot\|_\infty\right)$,

$$\left(\frac{n+2}{\lambda} \right)^{\frac{r}{2}} \mathbb{E}[Z_\lambda] \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n}\right)} \, |\mathrm{d}V_M| \, .$$

Caractéristique d'Euler moyenne

Soit Z une variété lisse, on note $\chi(Z)$ sa caractéristique d'Euler.

- $\chi(Z) \in \mathbb{Z}$.
- χ est un invariant topologique.
- Si Z surface triangulée, $\chi(Z) = \#\text{faces} - \#\text{arêtes} + \#\text{sommets}$.
- Si $\dim(Z)$ est impaire, $\chi(Z) = 0$.

Caractéristique d'Euler moyenne

Soit Z une variété lisse, on note $\chi(Z)$ sa caractéristique d'Euler.

- $\chi(Z) \in \mathbb{Z}$.
- χ est un invariant topologique.
- Si Z surface triangulée, $\chi(Z) = \#\text{faces} - \#\text{arêtes} + \#\text{sommets}$.
- Si $\dim(Z)$ est impaire, $\chi(Z) = 0$.

Théorème (L., 2014)

Soient $f_1, \ldots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, et $Z_\lambda = \bigcap f_i^{-1}(0)$. Si $n - r$ est pair, on a :

$$\mathbb{E}[\chi(Z_\lambda)] \sim (-1)^{\frac{n-r}{2}} \left(\frac{\lambda}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{Vol}(M) \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r+1}\right) \mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{r-1}\right)}{\pi \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n) \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

Idées de preuves

La fonction de corrélation

Une fonction aléatoire $f \in V_\lambda$ de loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, définit un processus gaussien centré $(f(x))_{x \in M}$.

Il est caractérisé par sa fonction de corrélation $e_\lambda : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[f(x)f(y)]$.

Remarque

En dérivant sous l'intégrale, $\dfrac{\partial e_\lambda}{\partial x_i}(x, y) = \mathbb{E}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)f(y)\right]$.

La fonction de corrélation

Une fonction aléatoire $f \in V_\lambda$ de loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, définit un processus gaussien centré $(f(x))_{x \in M}$.

Il est caractérisé par sa fonction de corrélation $e_\lambda : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[f(x)f(y)]$.

Remarque

En dérivant sous l'intégrale, $\dfrac{\partial e_\lambda}{\partial x_i}(x, y) = \mathbb{E}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) f(y)\right]$.

Si $(\psi_1, \ldots, \psi_N)$ est une base orthonormée de $(V_\lambda, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$, on a $f = \sum a_i \psi_i$, où les a_i sont des v.a.i.i.d $\mathcal{N}(0, 1)$.

Pour tout $x, y \in M$,

$$e_\lambda(x, y) = \mathbb{E}[f(x)f(y)] = \sum_{i,j} \mathbb{E}[a_i a_j]\, \psi_i(x)\psi_j(y) = \sum_i \psi_i(x)\psi_i(y).$$

La fonction spectrale du laplacien

Lemme

Soit $\Pi_\lambda : L^2(M) \to V_\lambda$ la projection orthogonale. Pour tout $\psi \in L^2(M)$ et tout $x \in M$ on a :

$$\Pi_\lambda(\psi)(x) = \int_{y \in M} e_\lambda(x, y)\psi(y) \, |dV_M| \, .$$

I.e. e_λ est le noyau de Π_λ, aussi appelé fonction spectrale du laplacien.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int_{y \in M} e_\lambda(x, y)\psi(y) \, |dV_M| &= \int_{y \in M} \sum_i \psi_i(x)\psi_i(y)\psi(y) \, |dV_M| \\ &= \sum_i \psi_i(x) \, \langle \psi_i \, , \psi \rangle \, .\end{aligned}$$

□

Le cas du cercle $\mathbb{S}^1$ euclidien

Sur le cercle euclidien, e_λ est le noyau de Dirichlet de degré $\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor$:

$$e_\lambda(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left((\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor + \frac{1}{2})(x-y)\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}.$$

- $e_\lambda(x,y)$ ne dépend que de $d(x,y)$.
- On a une limite d'échelle : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_\lambda\left(x, x+\frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(h)}{h}$.

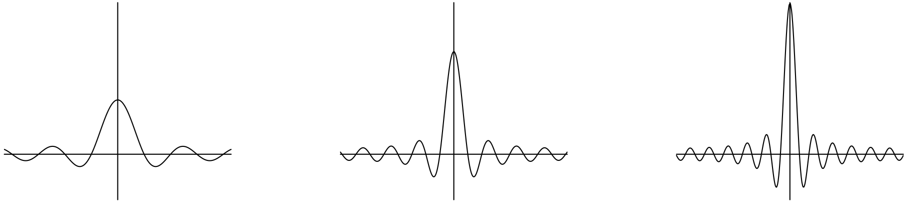


Figure: Le noyau de Dirichlet, pour $\lambda = 16$, $\lambda = 64$ et $\lambda = 144$.

Une heuristique

Sur une variété (M, g), la fonction de corrélation fait apparaître une échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$: environ $\mathrm{Vol}\,(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}}$ boîtes.

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_λ ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Une heuristique

Sur une variété (M, g), la fonction de corrélation fait apparaître une échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$: environ $\mathrm{Vol}\,(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}}$ boîtes.

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_λ ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Une boîte contribue de l'ordre de $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n-r}$ au volume, et de l'ordre de 1 à la caractéristique d'Euler.

$\mathrm{Vol}\,(Z_\lambda)$ est de l'ordre de $\mathrm{Vol}\,(M)\,\lambda^{\frac{r}{2}}$, et $\chi(Z_\lambda)$ de l'ordre de $\mathrm{Vol}\,(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}}$.

Variété d'incidence

Soient $F_\lambda : (f,x) \mapsto f(x)$ de $V_\lambda \times M$ dans $\mathbb{R}$, et $\Sigma_\lambda = {F_\lambda}^{-1}(0)$.

Lemme

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, Σ_λ est une hypersurface lisse de $V_\lambda \times M$.

Démonstration.

Pour tout $(f,x) \in V_\lambda \times M$, $\partial_1 F_\lambda(f,x) : h \mapsto h(x)$.
Comme V_λ contient les constantes, cette application est surjective.
Donc F_λ est une submersion. □

Variété d'incidence

Soient $F_\lambda : (f,x) \mapsto f(x)$ de $V_\lambda \times M$ dans $\mathbb{R}$, et $\Sigma_\lambda = {F_\lambda}^{-1}(0)$.

Lemme

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, Σ_λ est une hypersurface lisse de $V_\lambda \times M$.

Démonstration.

Pour tout $(f,x) \in V_\lambda \times M$, $\partial_1 F_\lambda(f,x) : h \mapsto h(x)$.
Comme V_λ contient les constantes, cette application est surjective.
Donc F_λ est une submersion. $\square$

Les points critiques de $\pi_1 : \Sigma_\lambda \to V_\lambda$ sont les (f,x) tels que $d_x f = 0$.
Ses valeurs critiques sont les f qui ne s'annulent pas transversalement.

Par le lemme de Sard, Z_λ est presque surement une hypersurface lisse.

Un échange d'intégrales

Soit $\phi : \Sigma_\lambda \to \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}\int_{f\in V_\lambda}\left(\int_{x\in Z_\lambda}\phi(f,x)\,|\mathrm{d}V_\lambda|\right)\mathrm{d}f &= \int_{(f,x)\in\Sigma_\lambda}\phi(f,x)\qquad\qquad |\mathrm{d}V_{\Sigma_\lambda}| \\ &= \int_{x\in M}\left(\int_{\{f|f(x)=0\}}\phi(f,x)\qquad\qquad \mathrm{d}f\right)|\mathrm{d}V_M|\,.\end{aligned}$$

Un échange d'intégrales

Soit $\phi : \Sigma_\lambda \to \mathbb{R}$, alors :

$$\int_{f\in V_\lambda}\left(\int_{x\in Z_\lambda}\phi(f,x)\,|\mathrm{d}V_\lambda|\right)\mathrm{d}f = \int_{(f,x)\in\Sigma_\lambda}\phi(f,x)\,\mathrm{Jac}_{(f,x)}(\pi_1)\,|\mathrm{d}V_{\Sigma_\lambda}|$$
$$= \int_{x\in M}\left(\int_{\{f|f(x)=0\}}\phi(f,x)\frac{\mathrm{Jac}_{(f,x)}(\pi_1)}{\mathrm{Jac}_{(f,x)}(\pi_2)}\,\mathrm{d}f\right)|\mathrm{d}V_M|\,,$$

où $\pi_2 : \Sigma_\lambda \to M$ et $\mathrm{Jac}_{(f,x)}(\pi_i) = \sqrt{\det\left(d_{(f,x)}\pi_i \circ d_{(f,x)}\pi_i^*\right)}$.

Un échange d'intégrales

Soit $\phi : \Sigma_\lambda \to \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}\int_{f\in V_\lambda}\left(\int_{x\in Z_\lambda}\phi(f,x)\,|\mathrm{d}V_\lambda|\right)\mathrm{d}f &= \int_{(f,x)\in\Sigma_\lambda}\phi(f,x)\,\mathrm{Jac}_{(f,x)}(\pi_1)\,|\mathrm{d}V_{\Sigma_\lambda}|\\ &= \int_{x\in M}\left(\int_{\{f|f(x)=0\}}\phi(f,x)\frac{\mathrm{Jac}_{(f,x)}(\pi_1)}{\mathrm{Jac}_{(f,x)}(\pi_2)}\,\mathrm{d}f\right)\,|\mathrm{d}V_M|\,,\end{aligned}$$

où $\pi_2 : \Sigma_\lambda \to M$ et $\mathrm{Jac}_{(f,x)}(\pi_i) = \sqrt{\det\left(d_{(f,x)}\pi_i \circ d_{(f,x)}\pi_i^*\right)}$.

On a, pour tout $(f,x)\in\Sigma_\lambda$,

$$\frac{\mathrm{Jac}_{(f,x)}(\pi_1)}{\mathrm{Jac}_{(f,x)}(\pi_2)} = \frac{\|d_x f\|}{\sqrt{e_\lambda(x,x)}}.$$

Une formule de Kac–Rice

Théorème (Formule de Kac–Rice)

Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0(M)$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_{x \in Z_\lambda} \varphi(x) \left|\mathrm{d}V_{Z_\lambda}\right|\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \varphi(x) \frac{\mathbb{E}\left[\|d_x f\| \,\middle|\, f(x) = 0\right]}{\sqrt{e_\lambda(x,x)}} \left|\mathrm{d}V_M\right|.$$

Démonstration.

Appliquer ce qui précède avec $\phi(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N}\varphi(x)e^{-\frac{\|f\|^2}{2}}$. $\square$

Espérance du volume

Pour tout $x \in M$, $(f(x), d_x f)$ est un vecteur gaussien centré de variance

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} e_\lambda(x,x) & \partial_{y_1} e_\lambda(x,x) & \cdots & \partial_{y_n} e_\lambda(x,x) \\ \partial_{x_1} e_\lambda(x,x) & \partial_{x_1}\partial_{y_1} e_\lambda(x,x) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{y_n} e_\lambda(x,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e_\lambda(x,x) & \partial_{x_n}\partial_{y_1} e_\lambda(x,x) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{y_n} e_\lambda(x,x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $d_x f$ sachant $f(x) = 0$ est une gaussienne centrée. Sa variance ne dépend que de e_λ et ses dérivées en (x, x).

Espérance du volume

Théorème (Hörmander, 1968 – Bin, 2004)

Il existe C_n et $C'_n > 0$ explicites telles que, pour tout $x \in M$,

- $e_\lambda(x,x) = C_n \lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i} e_\lambda(x,x) = O\left(\lambda^{\frac{n}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i}\partial_{y_j} e_\lambda(x,x) = \delta_{ij} C'_n \lambda^{\frac{n+2}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n+1}{2}}\right)$,

uniformément en x.

Espérance du volume

Théorème (Hörmander, 1968 – Bin, 2004)

Il existe C_n et $C'_n > 0$ explicites telles que, pour tout $x \in M$,

- $e_\lambda(x,x) = C_n \lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i} e_\lambda(x,x) = O\left(\lambda^{\frac{n}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i}\partial_{y_j} e_\lambda(x,x) = \delta_{ij} C'_n \lambda^{\frac{n+2}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n+1}{2}}\right)$,

uniformément en x.

On en déduit que pour tout $x \in M$:

$$\frac{\mathbb{E}\left[\|d_x f\| \,\middle|\, f(x) = 0\right]}{\sqrt{e_\lambda(x,x)}} = \sqrt{\frac{\lambda}{n+2}} \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n}\right)} + O(1).$$

Théorème de Gauss–Bonnet

On se place dans le cas $n = 3$, $r = 1$: Z_λ est une surface dans M.

Théorème (Gauss–Bonnet)

Soit κ_λ la courbure de Gauss de Z_λ, on a :

$$\chi(Z_\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{x \in Z_\lambda} \kappa_\lambda(x) \, |\mathrm{d}V_\lambda| \, .$$

Théorème de Gauss–Bonnet

On se place dans le cas $n = 3$, $r = 1$: Z_λ est une surface dans M.

Théorème (Gauss–Bonnet)

Soit κ_λ la courbure de Gauss de Z_λ, on a :

$$\chi(Z_\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{x \in Z_\lambda} \kappa_\lambda(x) \left|\mathrm{d}V_\lambda\right| .$$

Par une formule de Kac–Rice,

$$\mathbb{E}[\chi(Z_\lambda)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{x \in M} \frac{\mathbb{E}\left[\kappa_\lambda(x) \left\| d_x f \right\| \,\middle|\, f(x) = 0\right]}{\sqrt{e_\lambda(x,x)}} \left|\mathrm{d}V_M\right| .$$

La preuve pour χ

Formule de Gauss

$$\kappa_\lambda(x) = K(T_x Z_\lambda) + \det\left(\mathrm{II}_\lambda(x)\right),$$

où K est la courbure sectionnelle de M,
II_λ est la seconde forme fondamentale de Z_λ.

$$\mathrm{II}_\lambda(x) = \frac{1}{\|d_x f\|}(\nabla_x^2 f)_{/T_x Z_\lambda}$$

$(f(x), d_x f, \nabla_x^2 f)$ est un vecteur gaussien centré,
sa variance dépend seulement de e_λ et ses dérivées en (x, x).

La preuve pour χ

Formule de Gauss

$$\kappa_\lambda(x) = K(T_x Z_\lambda) + \det\left(\mathrm{II}_\lambda(x)\right),$$

où K est la courbure sectionnelle de M,
II_λ est la seconde forme fondamentale de Z_λ.

$$\mathrm{II}_\lambda(x) = \frac{1}{\|d_x f\|}(\nabla_x^2 f)_{/T_x Z_\lambda}$$

$(f(x), d_x f, \nabla_x^2 f)$ est un vecteur gaussien centré,
sa variance dépend seulement de e_λ et ses dérivées en (x, x).

- $K(T_x Z_\lambda)$ est borné, indépendamment de x, f et λ.
- $\det\left(\mathrm{II}_\lambda(x)\right)$ contribue un terme d'ordre λ.

Asymptotiquement, on ne voit plus la courbure ambiante.

The end

Merci de votre attention.